

Análise Matemática IV

Problemas para as Aulas Práticas

Semana 5

1. Determine e classifique as singularidades das seguintes funções, e calcule os resíduos correspondentes.

a) $f_1(z) = \frac{1 - \cos z}{z - \pi}$

b) $f_2(z) = \frac{z}{(z^2 + 2)^2}$

c) $f_3(z) = \frac{1}{z^7(1 - z^2)}$

d) $f_4(z) = \frac{\operatorname{sen} z}{z^4(1 - z^2)}$

e) $f_5(z) = z^2 \exp \frac{1}{z}$

2. Considere a função

$$g(z) = \frac{1}{\operatorname{sen} \frac{\pi}{z}}.$$

Mostre que $g(z)$ não possui uma singularidade isolada em $z = 0$.

3. Considere as curvas $\gamma_1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ e $\gamma_2 = \{z \in \mathbb{C} : |z + 2\pi i| = 1\}$, percorridas uma vez no sentido directo. Calcule o valor dos integrais

$$\oint_{\gamma_k} g(z) dz,$$

para cada uma das seguintes funções complexas:

(i) $g(z) = \frac{1}{e^z - 1}$, (ii) $g(z) = z^2 \operatorname{sen}(z^{-1})$, (iii) $g(z) = \frac{z - 2i}{z^4 - 4iz^3 - 4z^2}$.

4. Calcule o seguinte integral

$$\oint_C \left(\frac{z^2}{\operatorname{sen}(\pi z)} + z^2 \operatorname{sen} \frac{1}{(z - 1)^2} \right) dz,$$

onde C é a elipse $|z - 1| + |z + 1| = 3$, percorrida uma vez no sentido positivo.

5. Recorrendo ao Teorema dos Resíduos, mediante a escolha de um contorno de integração adequado, estabeleça os seguintes resultados:

$$(a) \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2 + \sin^2 \theta} = \pi \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$(b) \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 3\theta}{5 - 4 \cos 2\theta} d\theta = \frac{3\pi}{8}$$

Sugestão: mostre que $\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2(3\theta)}{5 - 4 \cos(2\theta)} d\theta = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_0^{2\pi} \frac{1 + e^{i6\theta}}{5 - 4 \cos(2\theta)} d\theta$

$$(c) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2 + 1)(x^2 + 3)} dx = \frac{(3 - \sqrt{3})\pi}{6}$$

$$(d) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^6 + 1} = \frac{2}{3}\pi$$

$$(e) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin x}{(x^2 + 1)} dx = \frac{\pi}{e}$$

6. Seja $f(z)$ uma função analítica no conjunto $A = \mathbb{C} - \{z_1, \dots, z_n\}$. Observe que a função $F(z) = \frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right)$ possui uma singularidade isolada em $z = 0$. Define-se o **resíduo de f em ∞** por:

$$\operatorname{Res}(f, \infty) = -\operatorname{Res}(F(z), 0).$$

Mostre que se $\gamma \subset A$ é uma curva simples, fechada, percorrida no sentido directo, que contém os pontos $\{z_1, \dots, z_n\}$ no seu interior, então:

$$\int_{\gamma} f(z) dz = -2\pi i \operatorname{Res}(f, \infty).$$